

## Quatre Petits Octogones

par Charles AUDET<sup>1</sup>, Pierre HANSEN<sup>2</sup>, Frédéric MESSINE<sup>3</sup>

<sup>1</sup> GERAD, École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, Succ. Centre-ville, Montréal (Québec), H3C 3A7 Canada

<sup>2</sup> GERAD, HEC Montréal, C.P. 6079, Succ. Centre-ville, Montréal (Québec), H3C 3A7 Canada

<sup>3</sup> ENSEEIHT-IRIT, UMR-CNRS 5055, 2 rue Camichel, 31000 Toulouse, France

Charles.Audet@gerad.ca, Pierre.Hansen@gerad.ca, Frederic.Messine@n7.fr

### Résumé

Quel octogone de diamètre unité (ou petit octogone) possède la plus grande surface ou le plus grand périmètre ? Serait-ce l’octogone régulier ? Eh ! non, il n’en est rien. Nous convions donc le lecteur à une passionnante chasse aux petits octogones, expédition qui débute en 1922 avec les travaux de Karl Reinhardt, se poursuit en 1950 grâce à l’octogone de la mystérieuse femme de Stephen Vincze, reprend vigueur en 1975 lorsque Ron Graham découvre le petit hexagone le plus étendu et aboutit ces dernières années par la conjonction de méthodes géométriques et d’algorithmes d’optimisation globale.

**Mots-clés :** polygones, octogone, surface, diamètre, périmètre, équilatéralité.

### Abstract

Which octagon with unit diameter (or small octagon) has the largest area or the longest perimeter ? Could it be the regular octagon ? Well, no, this is not the case. We therefore invite the reader to a fascinating hunt for small octagons, an expedition which begins in 1922 with the work of Karl Reinhardt, continues in 1950 with the octagon of the mysterious wife of Stephen Vincze, regains vigor in 1975 when Ron Graham discovers the largest small hexagon and reaches success these last years, through conjunction of geometric methods with global optimization algorithms.

**Key-words :** polygon, octagon, area, diameter, perimeter, equilaterality.

Cela fait maintenant quelques décennies que les algorithmes déterministes ou stochastique d’optimisation globale sont utilisés, avec une fréquence croissante, pour la résolution de problèmes géométriques, par exemple le problème très difficile et très ancien de l’empaquetage de cercles -en général de même rayon- dans un triangle, un carré, un rectangle ou un autre cercle plus grand. La littérature sur ce sujet est très vaste [31, 32]. L’idée est de montrer l’efficacité de codes d’optimisation pour la résolution de ces problèmes quand le raisonnement géométrique

seul atteint ses limites. Le but est identique en ce qui concerne les problèmes sur les polygones considérés dans cet article : montrer l’efficacité de nos algorithmes pour résoudre plusieurs problèmes de géométrie Euclidienne ouverts depuis fort longtemps. Ces problèmes, sous forme générique, sont relativement simples à résoudre dans la majorité des cas, à l’aide de raisonnements géométriques plus ou moins conventionnels, comme nous le verrons plus loin. Cependant, certains cas particuliers s’avèrent très difficiles et nécessitent le développement d’outils dédiés, faisant appel à des raisonnements géométriques associés à des méthodes de combinatoire et d’optimisation globale.

Les problèmes abordés dans ce travail sont issus, parfois indirectement, d’un article de Karl Reinhardt [25] publié en 1922, et qui traite des propriétés de surfaces et de périmètres maximaux des polygones convexes de diamètre donné.

## 1. Définition des problèmes

Nous appellerons un *petit polygone* avec  $n$  sommets (et donc  $n$  côtés), un polygone convexe dont le *diamètre* est unitaire ; c’est-à-dire que la distance maximum entre deux sommets de ce polygone, ou encore la longueur de sa plus grande diagonale, est égale à 1. Dans toutes les figures de cet article, les diamètres des polygones -égaux à 1- sont représentés par un trait continu alors que les côtés sont en traits pointillés, à moins qu’ils ne soient aussi un diamètre du polygone.

Les questions posées à propos de ces petits polygones de  $n$  sommets sont les suivantes :

1. Quel est le petit polygone de surface maximale ?
2. Quel est le petit polygone de périmètre maximum ?
3. Quel est le petit polygone équilatéral de surface maximale ?
4. Quel est le petit polygone équilatéral de périmètre maximum ?

Reinhardt [25] a montré que lorsque le nombre de sommets  $n$  est impair, les petits polygones réguliers sont de surface et de périmètre maximum ; les côtés étant égaux dans le cas des polygones réguliers les deux problèmes sont aussi résolus pour les polygones équilatéraux.

Qu’advient-il maintenant lorsque  $n$  est pair ?

Reinhardt [25] fait remarquer que le carré -cas  $n = 4$ - possède les deux propriétés d’être équilatéral et de surface maximale mais cette solution n’est pas unique si la contrainte sur les côtés égaux n’est pas prise en compte. En effet, la Figure 1 présente deux petits quadrilatères dont la surface est identique et égale à  $\frac{1}{2}$  ; soit  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$  pour le carré et  $\frac{b \times h_1}{2} + \frac{b \times h_2}{2} = \frac{b \times (h_1 + h_2)}{2} = \frac{1}{2}$  pour le second quadrilatère générique avec bien sûr  $b = 1$  et  $h_1 + h_2 = 1$ .

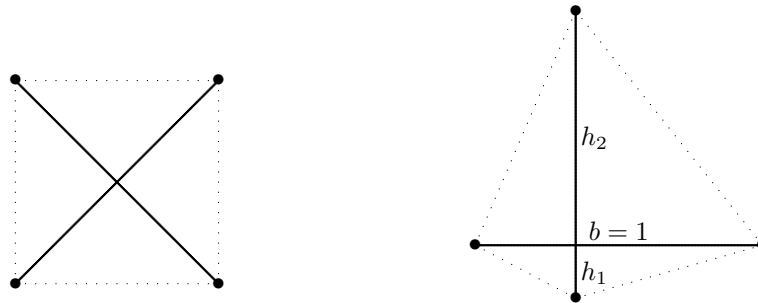


FIG. 1 – Quadrilatères d’aire maximale  $\frac{1}{2}$ .

Le quadrilatère équilatéral de périmètre maximal est bien le carré de diamètre 1, comme le montre le premier quadrilatère de la Figure 2. Dans le cas où les côtés ne sont pas tenus d’être égaux, N.K. Tamvakis [33] prouve, de manière analytique, en 1987 que le second petit quadrilatère représenté sur la Figure 2 est de surface maximale, et le seul à avoir cette propriété.

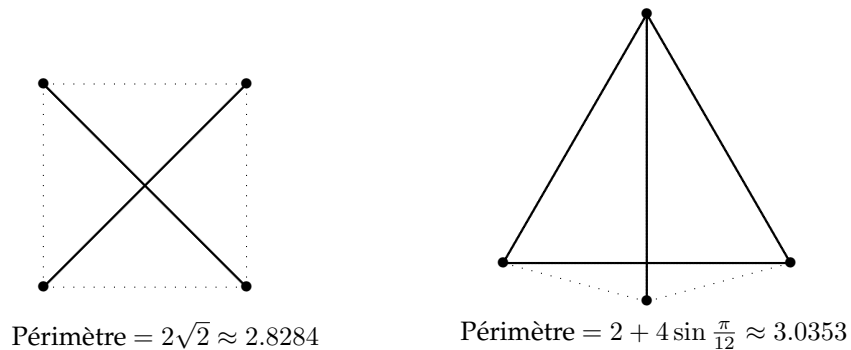


FIG. 2 – Quadrilatères de périmètre maximum.

Ainsi le cas  $n = 4$  a été résolu analytiquement et pas forcément de manière aisée, comme le montre la démonstration donnée par Basudeb Datta [10] pour le problème du périmètre maximum d’un petit quadrilatère.

## 2. Les polygones de Reuleaux

Les problèmes de périmètres maximaux vont nous amener à considérer une classe de figures géométriques étudiées déjà par Franz Reuleaux [26] il y a près d’un siècle. Les *polygones de Reuleaux* ne sont pas à proprement parler des polygones,

mais ils ont une base polygonale à laquelle on ajoute les arcs de cercle passant par les paires de sommets successifs, dont les centres sont les sommets opposés aux côtés. Trois exemples de polygones de Reuleaux, réguliers ou non, sont représentés en Figure 3. Une propriété remarquable des polygones de Reuleaux est que leur largeur est constante, c'est-à-dire la même dans toutes les directions, la largeur d'un polygone dans une direction étant la distance entre les deux droites d'appui de ce polygone perpendiculaire à cette direction, comme l'illustre la Figure 4.



FIG. 3 – Exemples de polygones de Reuleaux.

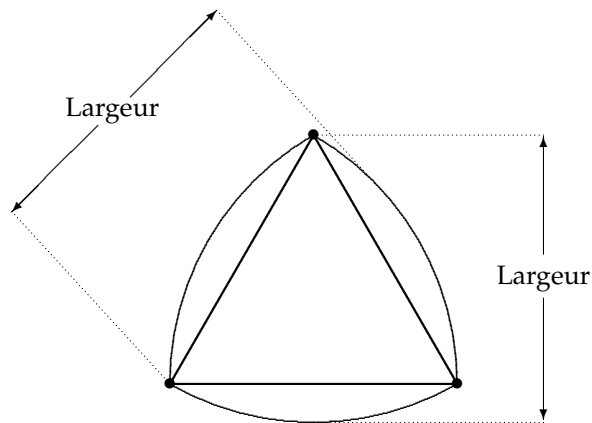


FIG. 4 – Exemple de largeur du triangle de Reuleaux.

Observons que les périmètres correspondant aux trois polygones de Reuleaux de diamètre unité présentés en Figure 3 sont tous égaux à  $\pi$ . C'est aussi la valeur du

périmètre du cercle de diamètre 1. De fait, ceci découle du théorème de Barbier : “toute courbe de largeur constante  $w$  a un périmètre  $\pi \times w$ ”.

Ainsi, la solution du problème du périmètre maximum d’un ensemble convexe de diamètre unité est bien sûr le cercle, mais aussi tous les petits polygones de Reuleaux réguliers ou irréguliers dont le polygone interne possède un nombre impair de sommets, tels que chacun d’entre eux soit à une distance 1 de deux autres sommets.

Pour les problèmes au sujet des périmètres maximaux, on dispose d’une borne supérieure, donnée vraisemblablement pour la première fois par Reinhardt [25] en 1922, voir aussi Datta [10] :

$$\max \{\text{périmètre d'un petit polygone de } n \text{ sommets}\} \leq 2n \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Cette borne est atteinte pour les petits polygones réguliers lorsque  $n$  est impair, ce qui montre bien que ces polygones sont optimaux en ce qui concerne les deux problèmes sur les périmètres. Ceci n’est plus vrai pour  $n = 4$ , car le périmètre du petit quadrilatère optimal est  $2 + 4 \sin \frac{\pi}{12} \approx 3.0353$ , comme on peut le voir sur la Figure 2, ce qui est strictement inférieur à la borne  $8 \sin \frac{\pi}{8} \approx 3.0615$ .

Soit  $V_n$  un petit polygone à  $n$  sommets où  $n$  est pair mais pas une puissance de 2. Donc  $n = m2^s$  où  $s$  est un entier positif et  $m$  un nombre impair, premier ou non. Un polygone de Reuleaux sera obtenu en construisant un polygone régulier à  $m$  côtés puis en remplaçant les côtés par des arcs de cercles de rayon 1, passant par leurs extrémités et centrés sur le sommet opposé, voir la Figure 3.

Pour obtenir le petit polygone à  $n$  sommets de périmètre maximum, il suffit d’insérer dans chaque arc de cercle, à intervalle régulier,  $2^s - 1$  sommets supplémentaires. La borne de Reinhardt est alors atteinte. En effet, les angles du petit polygone régulier de Reuleaux sont égaux à  $\alpha = \pi/(n/2^s)$  et en insérant  $2^s - 1$  nouveaux sommets dans chaque angle on divise l’angle  $\alpha$  par  $2^s$  ce qui nous donne la longueur d’un côté du polygone ainsi construit :

$$2 \sin \frac{\alpha}{2^s} = 2 \sin \frac{\pi/m}{2^s} = 2 \sin \frac{\pi/(n/2^s)}{2^s} = 2 \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Notons que si  $m$  est un nombre composé, il existe plusieurs solutions équivalentes au problème du petit polygone à  $n$  sommets de périmètre maximum. Datta [10] montre comment elles peuvent être toutes déterminées à l’aide d’un système d’équations diophantiennes. Un exemple avec trois solutions optimales pour  $n = 15$  est donné dans la Figure 5.

Le problème pour les périmètres est donc résolu quand le nombre de sommets  $n$  est impair : les polygones réguliers sont les solutions (non nécessairement uniques). Il en va de même lorsque  $n$  est pair mais pas une puissance de 2 : les polygones

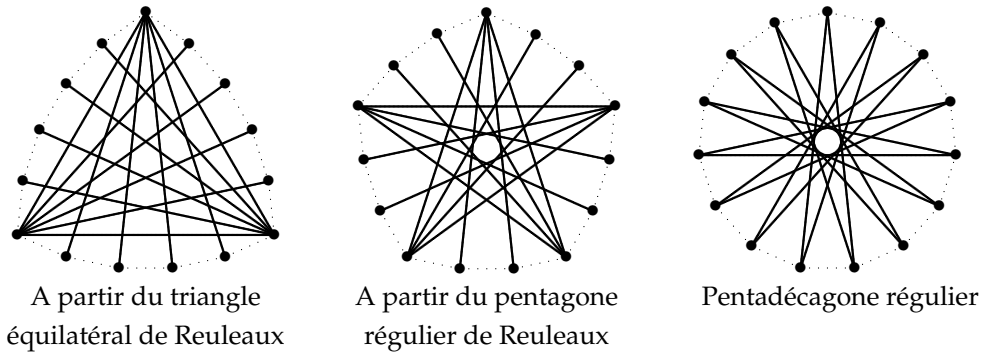


FIG. 5 – Trois pentadécagones de périmètre maximum.

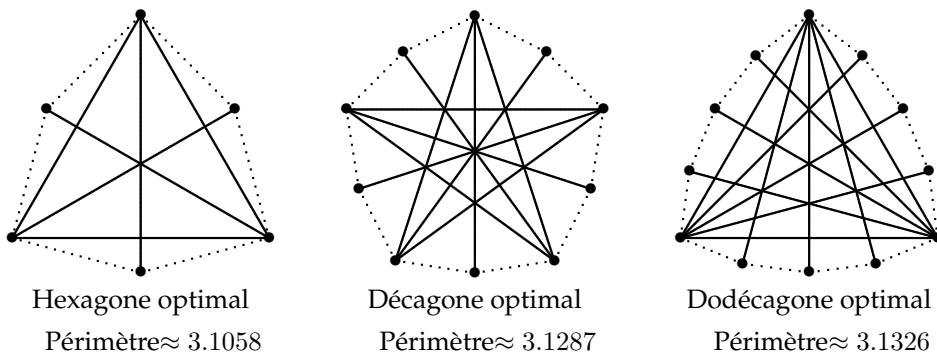


FIG. 6 – Exemples de polygones de périmètres maximaux  $n$  pair mais  $n \neq 2^s$ .

basés sur des polygones réguliers de Reuleaux sont les solutions. La Figure 6 illustre l'hexagone, le décagone et le dodécagone optimaux.

Le cas  $n = 4$  présenté en Figure 2 n'atteint pas la borne supérieure de  $8 \sin \frac{\pi}{8}$  donnée par Reinhardt [25]. De plus, ce dernier article contient *-in cauda venenum-* un résultat souvent négligé. Michael Mossinghoff [22] écrit à ce propos :

"...at the end of the paper, he [Reinhardt] abruptly returns to the isodiametric problems for the case of even  $n$ , showing that the regular  $n$ -gon never achieves the maximal area or perimeter when  $n$  is even and at least six. No hint of this result appears earlier in the article, so it seems possible that this epilogue was added after the original manuscript was prepared for publication. As a result, it is quite easy to overlook."

Des preuves partielles ou complètes de ce résultat sont dues, outre Reinhardt [25], à J.J. Schäffer [27], D.G. Larman et N.K. Tamvakis [15] et Tamvakis [33] ; voir aussi la Section 5 ci-dessous pour une nouvelle démonstration.

Ainsi, dans le cas des problèmes sur les périmètres les deux premiers cas ouverts concernaient les petits octogones ( $n = 2^3 = 8$ ).

### 3. Le petit hexagone de surface maximale

Dans le cas où les longueurs des côtés peuvent être différentes, Ron Graham [12] montre en 1975 qu'il existe un petit hexagone irrégulier qui possède une aire supérieure de 3.92% environ à celle de l'hexagone régulier.

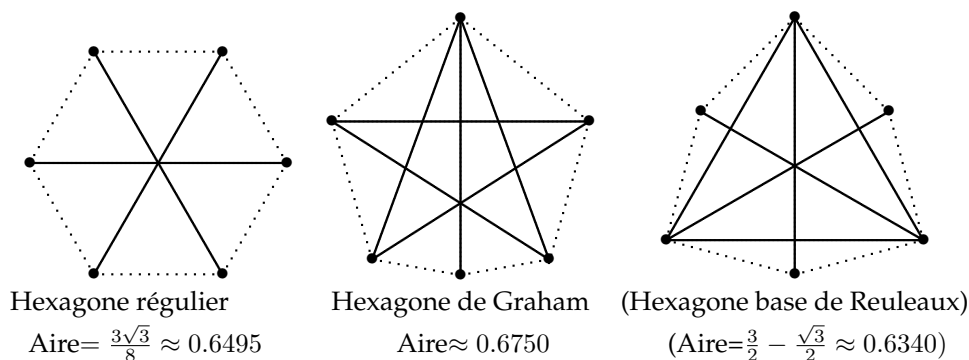
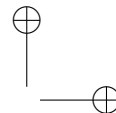
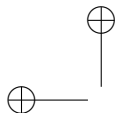


FIG. 7 – Deux hexagones de surface maximale et un autre.

De plus, Graham prouve que cette solution, présentée en Figure 7, est maximale ; ce n'est pas tout à fait un pentagone régulier auquel on aurait rajouté un sommet. Pour effectuer cette démonstration, Graham étudie le graphe formé par les sommets de l'hexagone et les arêtes composées des segments reliant les paires de



sommets dont la distance est 1. On appelle ce graphe, le *graphe des diamètres* et ce, pour n'importe quel polygone. En supposant les arêtes rigides et de longueur 1, on sait que le graphe des diamètres  $G$  d'un petit polygone jouit de plusieurs propriétés, présentées dans des articles de Paul Erdős [11] et D.R. Woodall [35] :

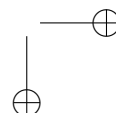
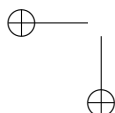
- deux arêtes quelconques de  $G$  ont exactement un point commun qui est, soit une extrémité soit un point intérieur pour toutes deux ;
- $G$  contient au plus un cycle, qui contient toujours un nombre impair d'arêtes ;
- si  $G$  est connexe et n'a pas de cycle, c'est une *chenille*, c'est-à-dire un chemin et des *arêtes pendantes*, reliant un sommet de ce chemin à un sommet n'ayant pas d'autre voisin ;
- si  $G$  est connexe et a un cycle les autres arêtes de  $G$  sont des arêtes pendantes joignant un sommet du cycle à un sommet n'ayant pas d'autre voisin.

En montrant que, pour le problème considéré, le graphe diamétrique est connexe, c'est-à-dire que deux sommets quelconques sont toujours reliés par un chemin, Graham énumère tous les graphes de diamètres possibles pour l'hexagone (ils ont tous forcément 5 ou 6 arêtes) ; la solution optimale correspond à l'une des 10 configurations possibles, présentées dans [12]. Neuf d'entre elles peuvent être éliminées par des raisonnements géométriques en montrant que leur surface ne peut pas dépasser celle de l'hexagone régulier, soit 0.6495. Il reste une configuration basée sur un pentagone étoilé auquel on a rajouté une arête pendante le long de la bissectrice d'un angle, voir Figure 8. Graham montre alors (ou du moins affirme que) la solution optimale correspondant à cette configuration admet une symétrie axiale. Le problème se ramène alors à une dimension et peut rapidement être résolu par des méthodes de dichotomie, voir [12, 13].

En fait, comme l'a très récemment signalé Mossinghoff [22, 23], l'hexagone de Graham avait déjà été obtenu par H. Bieri [8], en 1961, sous l'hypothèse (non démontrée) d'une symétrie axiale. Que Graham ait manqué cette référence est bien compréhensible : Bieri répondait à une question de K. Lenz [16] posée en 1956 dans *Elemente der Mathematik* et intitulée "Ungelöste Probleme Nr. 12" (Problème ouvert numéro 12). Son article est intitulé en conséquence "Ungelöste Probleme : Zweiter Nachtrag zu Nr. 12" (Problème ouvert, second supplément au numéro 12) ce qui, il faut bien l'admettre, n'indique qu'assez peu une connection avec les petits polygones.

Si Graham affirme clairement la symétrie de la solution optimale, il est avare de détails en ce qui concerne la démonstration. A propos de la dixième configuration, reprise dans la Figure 8, il note :

"It is immediate that in order to maximize area  $R_1$ , it is necessary that  $\alpha_1 = \alpha_2$ . It is slightly less immediate (but equally true) that it is also necessary that  $\theta_1 = \theta_2$ . (The details are not particularly interesting and are omitted)."





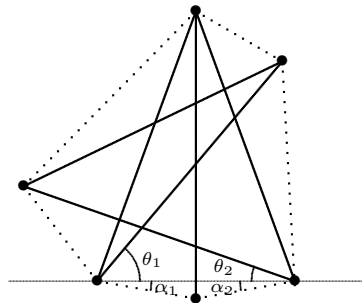


FIG. 8 – Configuration hexagonale numéro 10 de surface  $R_1$ .

Rétrospectivement, il apparaît donc que cette publication de Graham est un cas, sans doute assez rare, où la partie originale d’un article novateur a été omise par son auteur.

Dans son mémoire de maîtrise Bao Yuan [36] reprend en détails l’article de Graham et donne une preuve complète de la symétrie de la solution optimale. L’optimalité de cette solution a également été vérifiée numériquement, sans faire d’hypothèse de symétrie.

De plus, Graham conjecture dans [12] que quand  $n$  est pair la configuration donnant la structure du polygone de surface maximale est basée sur le graphe des diamètres composé d’un polygone étoilé de  $n - 1$  sommets ( $n - 1$  est impair) auquel un sommet est rajouté sur la bissectrice d’un angle et à distance 1 du sommet opposé. De plus, le polygone est supposé symétrique par rapport à cette bissectrice. Cette conjecture est aussi vérifiée pour  $n = 4$  (le polygone étant un triangle) car la surface du quadrilatère représenté sur la Figure 2 est égale à  $\frac{1}{2}$  de même que pour le carré de côté  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C’est à la suite d’une conférence de Graham sur le rôle de l’ordinateur en mathématique, présentée à l’Université Rutgers à la fin des années 1980, que le second auteur s’est intéressé aux petits polygones. Au cours d’une discussion avec le conférencier, fort sceptique, il a émis l’hypothèse que le petit octogone de surface maximale pourrait être déterminé à l’aide de méthodes d’optimisation globale. C’est bien ce qui s’est passé... plus de 10 ans plus tard.

En ce qui concerne les petits hexagones équilatéraux, nous avons prouvé, à l’aide d’un algorithme déterministe d’optimisation globale, basé sur des techniques de reformulation et linéarisation, pour les programmes quadratiques non convexes à contraintes quadratiques également non convexes [3], que le petit hexagone régulier avait la propriété d’être de surface maximale.

Ainsi, pour les problèmes de surfaces maximales les deux premiers cas ouverts concernaient aussi les petits octogones.

#### 4. Les quatre petits octogones

Nous avons étudié et résolu les quatre problèmes ouverts sur les octogones cités plus haut. Les résultats concernant les trois premiers ont été publiés (ou soumis) dans trois articles, [4, 6, 7]; le quatrième, soit la détermination du petit octogone équilatéral de surface maximum, n’a pas encore fait l’objet d’une publication. Ceci nous donne droit au titre d’*octogoniste* : personne ayant résolu au moins une fois dans sa vie un problème au sujet des octogones. Dans ce club très select, il faut bien sûr rajouter nos co-auteurs Sylvain Perron et Junjie Xiong, ainsi que la femme de Stephen Vincze, voir son octogone représenté en Figure 14 ; tout autre octogoniste confirmé est prié de prendre contact avec les auteurs.

Dans tout ce qui suit et jusqu’à ce que cela soit à nouveau précisé, la contrainte d’équilatéralité n’est pas prise en compte.

Nous avons montré dans [4] et dans [7] que la solution optimale, dans le cas du problème de la surface maximale comme dans le cas du problème du périmètre maximum, correspond à l’une de 31 configurations possibles (graphes des diamètres de 7 ou 8 arêtes), voir Figure 9 pour quelques unes d’entre elles.

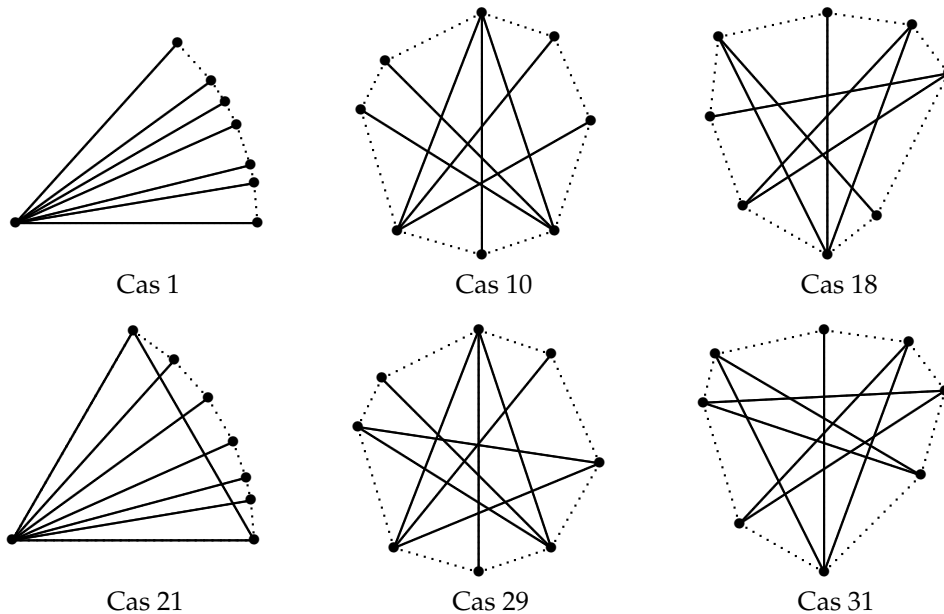


FIG. 9 – Exemples de configurations diamétriques.

En ce qui concerne le problème du petit octogone de surface maximale et en suivant la conjecture de Graham, nous avons d’abord résolu le problème d’optimisation globale correspondant à la configuration 31 de la Figure 9.

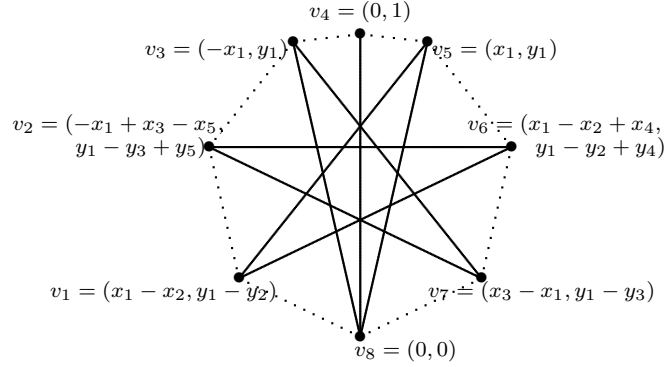


FIG. 10 – Définition des variables du cas 31, suivant la conjecture de Graham.

Le problème de programmation quadratique obtenu est donné ci-dessous. Il comprend 10 variables, définies sur la Figure 10, 23 contraintes quadratiques dont 6 égalités, 1 contrainte linéaire et 10 contraintes de bornes. La fonction objectif correspond au calcul de la surface de l’octogone. Les contraintes expriment que les distances (au carré) entre deux sommets ne dépassent pas 1 et que les distances correspondant à des diamètres sont égales à 1. Par symétrie, et sans perte de généralité, la contrainte  $x_2 \geq x_3$  est ajoutée.

$$\begin{aligned}
 \max_x \quad & \frac{1}{2} \{ (x_2 + x_3 - 4x_1)y_1 + (3x_1 - 2x_3 + x_5)y_2 + (3x_1 - 2x_2 + x_4)y_3 \\
 & \quad \quad \quad + (x_3 - 2x_1)y_4 + (x_2 - 2x_1)y_5 \} + x_1 \\
 \text{s.c.} \quad & \|v_8 - v_1\| \leq 1 : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 1, \\
 & \|v_8 - v_2\| \leq 1 : (-x_1 + x_3 - x_5)^2 + (y_1 - y_3 + y_5)^2 \leq 1, \\
 & \|v_8 - v_6\| \leq 1 : (x_1 - x_2 + x_4)^2 + (y_1 - y_2 + y_4)^2 \leq 1, \\
 & \|v_8 - v_7\| \leq 1 : (-x_1 + x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \leq 1, \\
 & \|v_1 - v_2\| \leq 1 : (2x_1 - x_2 - x_3 + x_5)^2 + (-y_2 + y_3 - y_5)^2 \leq 1, \\
 & \|v_1 - v_3\| \leq 1 : (2x_1 - x_2)^2 + y_2^2 \leq 1, \\
 & \|v_1 - v_4\| \leq 1 : (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2 - 1)^2 \leq 1, \\
 & \|v_1 - v_7\| \leq 1 : (2x_1 - x_2 - x_3)^2 + (-y_2 + y_3)^2 \leq 1, \\
 & \|v_2 - v_3\| \leq 1 : (x_3 - x_5)^2 + (-y_3 + y_5)^2 \leq 1, \\
 & \|v_2 - v_4\| \leq 1 : (-x_1 + x_3 - x_5)^2 + (y_1 - y_3 + y_5 - 1)^2 \leq 1, \\
 & \|v_2 - v_5\| \leq 1 : (2x_1 - x_3 + x_5)^2 + (-y_3 + y_5)^2 \leq 1, \\
 & \|v_2 - v_6\| = 1 : (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5)^2 + (-y_2 + y_3 + y_4 - y_5)^2 = 1, \\
 & \|v_3 - v_6\| \leq 1 : (-2x_1 + x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 \leq 1, \\
 & \|v_4 - v_6\| \leq 1 : (x_1 - x_2 + x_4)^2 + (y_1 - y_2 + y_4 - 1)^2 \leq 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \|v_4 - v_7\| \leq 1 &: (x_1 - x_3)^2 + (1 - y_1 + y_3)^2 \leq 1, \\
 \|v_5 - v_6\| \leq 1 &: (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 \leq 1, \\
 \|v_5 - v_7\| \leq 1 &: (2x_1 - x_3)^2 + y_3^2 \leq 1, \\
 \|v_6 - v_7\| \leq 1 &: (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + (-y_2 + y_3 + y_4)^2 \leq 1, \\
 x_i^2 + y_i^2 = 1 & \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \\
 x_2 - x_3 \geq 0 & \quad y \geq 0 \\
 0 \leq x_1 \leq 0.5 & \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème nous avons de nouveau eu recours à l’algorithme de Audet *et al.* [3]. C’est une méthode de branchement et coupe, basée sur la technique de reformulation et linéarisation (RLT, voir [29, 30, 28]). Les carrés et les produits de paires de variables sont remplacés par des nouvelles variables et des contraintes linéaires ajoutées de sorte que l’approximation soit la meilleure possible. Le branchement est effectué de sorte que l’erreur locale pour un terme soit dans le pire cas, la plus petite possible (au lieu de suivre une règle arbitraire comme le choix du milieu de l’intervalle des valeurs possibles). De plus, des coupes résultant du branchement peuvent être utilisées en différents nœuds de l’arbre de branchement. Enfin, la résolution débute par la détermination des intervalles de valeurs admissibles pour chacune des variables, ce qui renforce considérablement les bornes.

La valeur optimale de ce problème est  $z^* \approx 0.726867$ , l’erreur ne dépasse pas  $10^{-5}$ , avec  $x = (0.26214, 0.67194, 0.67194, 0.90980, 0.90980)$  et  $y_i = \sqrt{1 - x_i^2}$ ; ceci donne les coordonnées des sommets  $v_i = (a_i, b_i)$  présentées dans le Tableau 1.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_i$	-0.40980	-0.5	-0.26214	0	0.26214	0.5	0.40980	0
$b_i$	0.22442	0.63947	0.96503	1	0.96503	0.63947	0.22442	0

TAB. 1 – Coordonnées des sommets du petit octogone de surface maximale.

Ce problème a été résolu en 1997 et la solution publiée dans la thèse de Charles Audet [2]. La résolution a nécessité à l’époque plus de 100 heures de calcul sur une station SUN-SPARC 20. Le petit octogone de surface maximale a ainsi été déterminé. Sa surface est 2.79% environ plus grande que celle de l’octogone régulier, voir Figure 11.

Il fallait encore prouver que c’était bien la solution optimale en éliminant les 30 configurations restantes. Dans [7], nous utilisons pour ce faire des raisonnements géométriques combinés à des méthodes numériques. Par exemple, il est aisé de voir que pour la configuration 21, dont la configuration 1 est une relaxation (voir Figure 9), la surface ne peut dépasser  $\frac{\pi}{6} \approx 0.5236$  ce qui est inférieur à la surface

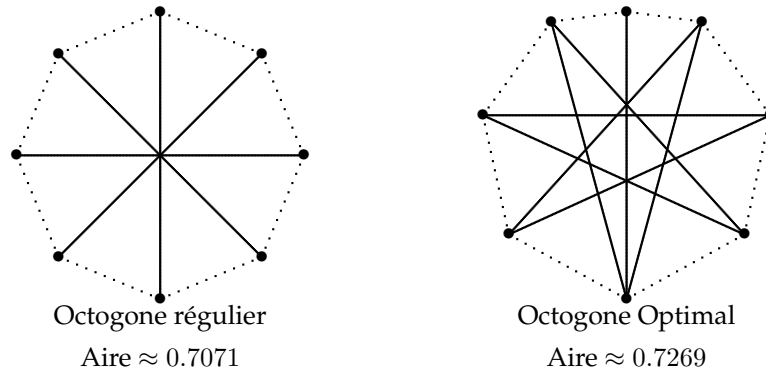


FIG. 11 – L’octogone régulier et le petit octogone de surface maximale.

de l’octogone régulier, soit  $\approx 0.7071$ . Ces deux configurations ne peuvent donc pas correspondre à un petit octogone de surface maximale.

Pour la petite histoire, cela nous a pris 4 années supplémentaires ; et l’acceptation de la publication [7] est survenue en 2001.

Pour le problème du petit octogone de périmètre maximum, c’est la configuration diamétrique 29 qui donne la solution optimale.

Cette solution a été obtenue en résolvant le cas correspondant à la configuration 10, voir Figure 12, qui est une relaxation de la configuration 29 ; en ajoutant l’arête  $[v_0, v_4]$  au cas 10, on obtient la configuration 29, comme le montre la Figure 9. L’unique différence entre les formulations des cas 10 et 29, est que la contrainte  $\|v_0 - v_4\| \leq 1$  est remplacée par la contrainte d’égalité  $\|v_0 - v_4\| = 1$ .

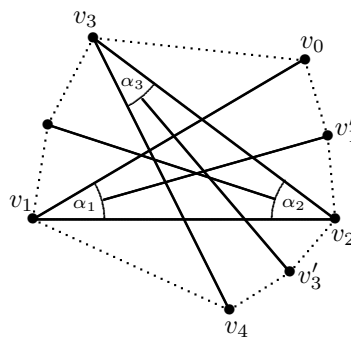


FIG. 12 – Configuration diamétrique 10

Le programme non-convexe correspondant est :

$$\begin{aligned} \max_{\alpha} \quad & 4 \sin \frac{\alpha_1}{4} + 4 \sin \frac{\alpha_2}{4} + 4 \sin \frac{\alpha_3}{4} + \|v_1 - v_4\| + \|v_0 - v_3\| \\ \text{s.c.} \quad & \|v_0 - v_4\| \leq 1 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{3} \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2)$$

où les coordonnées des sommets à fixer pour en déduire la solution optimale sont  $v_0 = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1)$ ,  $v_1 = (0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 0)$ ,  $v_3 = (1 - \cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$  et  $v_4 = (1 - \cos \alpha_2 + \cos(\alpha_2 + \alpha_3), \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_2 + \alpha_3))$ , voir de nouveau la Figure 12. En résolvant ce problème à l’aide d’une méthode d’optimisation globale de type par séparation et évaluation utilisant l’analyse d’intervalles [21, 24], des calculs de bornes avec la méthode dite du simplexe admissible [14, 20] et la propagation de contraintes, implémentée dans le code IBBA [17, 18], nous avons obtenu en trois heures de calculs sur le cluster de 30 PC de l’université de Pau, la solution exacte, qui a un périmètre optimal de  $p^* = 3.121147$ , avec une erreur inférieure à  $10^{-6}$ . En analysant cette solution, on s’aperçoit que la contrainte  $\|v_0 - v_4\| \leq 1$  est saturée et ainsi la solution optimale correspond à la configuration 29. En rajoutant au problème (2) ci-dessus, des contraintes basées sur les conditions d’optimalité du premier ordre :

$$\frac{\partial (\|v_2 - v'_1\| + \|v'_1 - v_0\| + \|v_0 - v_3\|)}{\partial \alpha_1} = 0$$

et,

$$\frac{\partial (\|v_2 - v'_3\| + \|v'_3 - v_4\| + \|v_4 - v_1\|)}{\partial \alpha_3} = 0$$

où  $v'_1 = (\cos(\frac{\alpha_1}{2}), \sin(\frac{\alpha_1}{2}))$  et  $v'_3 = (x_3 + \cos(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2}), y_3 - \sin(\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2}))$ , et grâce à l’ajout des contraintes de bornes  $0.688 \leq \alpha_i \leq 0.881, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ , l’algorithme de séparation et évaluation par intervalles, montre, en seulement 0.12 secondes, que la configuration 10 peut-être éliminée, voir [4].

La résolution complète du problème est détaillée dans [4] et a nécessité environ une année supplémentaire à partir du moment où la solution présentée sur la Figure 13 fût trouvée. Dans cette démonstration aussi, nous combinons des raisonnements géométriques avec des outils numériques adaptés à ce problème de périmètre, et différents de ceux utilisés pour le problème de surface maximale [7]. Après une première étape de calcul -qui prend environ 12h sur un cluster de 30 PC allant de 1GHz à 2.4GHz, le cas le plus difficile étant le cas 20 car il possède 6 variables et des expressions analytiques très longues et complexes-, il restait encore la configuration 18 à étudier. Ce cas est en fait une relaxation des configurations 29 -qui est optimale- et 31 -dont la solution est 3.1185 très proche de 3.1211-. Ce cas 18 ne peut être éliminé comme les cas 10 et 16, car les contraintes sur les conditions d’optimalité du premier ordre sont vérifiées à l’optimum. De

plus, dans ce cas, les techniques de propagation de contraintes s'avèrent inefficaces et donc la résolution dépend seulement de l'algorithme de séparation et évaluation par intervalles dont toutes les bornes (y compris pour les contraintes) sont calculées à l'aide des techniques dites du simplexe admissible. Ainsi, ce dernier cas a été résolu en 44h de calculs et a permis de trouver une borne supérieure à la solution qui est  $0.5 \times 10^{-4}$  au dessus de 3.121147. En outre, on prouve aussi à l'aide de cet algorithme, que la contrainte sur la distance  $\leq 1$  qui exprime la différence entre les cas 18 et 29 est satisfaite pour une valeur comprise entre 0.999 et 1, ce qui montre bien que le processus converge vers la saturation de cette contrainte faisant basculer de la configuration 18 à la configuration 29. Donc, 3.1211 est le périmètre maximum ; tous les chiffres sont garantis grâce à l'utilisation de l'arithmétique d'intervalles arrondie [21].

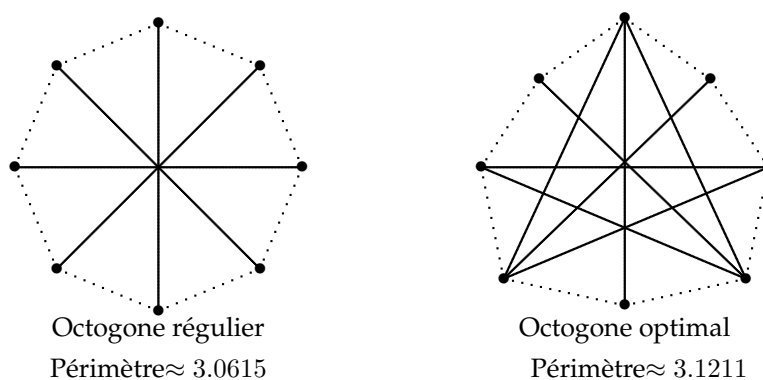


FIG. 13 – Octogone de périmètre maximum

En utilisant MAPLE<sup>TM</sup> et en supposant que la solution optimale possède un axe de symétrie, on peut trouver une solution analytique à ce problème [4].

Prenons maintenant en compte la contrainte d'équilatéralité. Nous avons montré que dans le cas de la surface maximale, l'octogone régulier est la solution de ce problème. Qu'en est-il pour le problème du périmètre maximum ?

Pour ce problème, une solution meilleure que l'octogone régulier a été publiée par Vincze en 1950 [34]. Il précise dans une note infrapaginale

"I am grateful for this example to my wife",

et ce, sans donner aucune indication sur la façon dont cet octogone a été obtenu. Le mystérieux octogone de la non moins mystérieuse femme de Vincze est reproduit en Figure 14. Dans [6], nous avons montré avec Perron que cet octogone, qui a résisté pendant 54 ans, était sous-optimal, voir Figure 14.

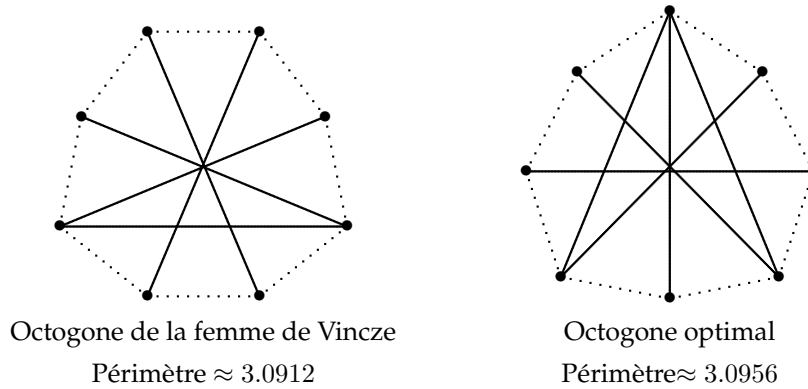


FIG. 14 – Octogone équilatéral de périmètre maximum

Pour résoudre complètement ce problème, nous démontrons notamment dans [6] que la solution doit avoir les 4 diagonales principales égales à 1 (c'est aussi la structure de l'octogone régulier). Ensuite, le programme quadratique donné en Figure 15, a été résolu par des techniques de reformulation et linéarisation, [3], en seulement 45 secondes et avec une erreur inférieure à  $10^{-7}$ . Les contraintes expriment que les côtés sont de longueur égale  $a$ , que les diagonales sont de longueur 1, que les distances entre paires de sommets sont inférieures ou égales à 1, enfin que la longueur des côtés est comprise entre celle de l'octogone régulier et la longueur de l'arc de cercle correspondant.

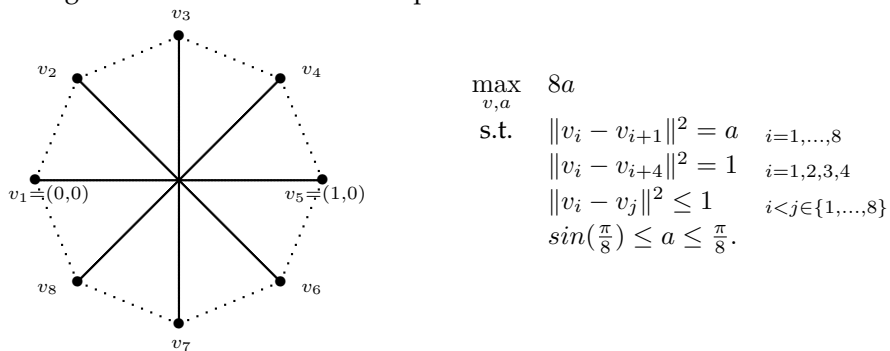


FIG. 15 – Formulation du problème de périmètre maximum pour un petit octogone équilatéral

En fait, le problème résolu dans [6], est le problème de l'octogone de diamètre minimum et de côté 1, ce qui est équivalent à la recherche du petit octogone



équilatéral de périmètre maximum.

### 5. Quelques remarques sur les petits polygones réguliers

Nous venons de voir que les petits polygones réguliers possédaient les propriétés de surface et de périmètre maximum seulement lorsque le nombre de sommets  $n$  est impair, excepté pour le cas des petits polygones équilatéraux de surface maximale, mais ceci n'est pour l'instant vérifié que pour  $n = 4, 6$  et  $8$ .

Soit  $A_n$  l'aire du petit polygone régulier de  $n$  sommets et soit  $P_n$  son périmètre. Nous obtenons les propriétés suivantes :

Si  $n$  est impair alors

$$P_n = 2n \sin \frac{\pi}{2n}, \text{ borne de Reinhardt,}$$

$$A_n = \frac{1}{2} \times n \times \left( \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2n}} \right)^2 \times \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Si  $n$  est pair alors

$$P_n = n \sin \frac{\pi}{n},$$

$$A_n = \frac{1}{8} \times n \times \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Les calculs montrent que si  $n$  est un nombre pair supérieur ou égal à 6, alors

$$A_n < A_{n-1}.$$

La preuve n'est pas si évidente et est donnée dans un article soumis pour publication [5].

D'autre part, si  $n$  est un nombre pair supérieur ou égal à 6 et n'est pas une puissance de 2,

$$P_n = P_{\frac{n}{2}},$$

directement d'après les définitions sur les périmètres.

Nous obtenons donc les séquences non-monotones suivantes :

$$A_6 \approx 0.6495 < A_5 \approx 0.6572 < A_8 \approx 0.7071 < A_7 \approx 0.7197 < A_{10} \approx 0.7347$$

$$< A_9 \approx 0.7456 \dots < \frac{\pi}{4}$$

et

$$P_4 < P_3 = P_6 < P_8 < P_5 = P_{10} < P_{12} < P_7 = P_{14} < P_{16} \dots < \pi.$$

Surprenant non ?

Nous pouvons ainsi montrer, ce qui constitue une autre preuve du résultat de Reinhardt cité plus haut, que dans le cas où  $n \geq 6$  est pair (puissance de 2 ou

non) et sans prendre en compte la contrainte d'équilatéralité, le petit polygone régulier de  $n$  sommets n'est pas de surface ou de périmètre optimal. Il existe en effet une solution meilleure construite à partir du petit polygone régulier de  $n - 1$  sommets auquel on rajoute un sommet n'importe où à l'extérieur de ce polygone, tout en conservant la contrainte sur le diamètre unité.

## 6. Conclusion

Dans trois articles sur les petits octogones et quelques travaux en cours, nous avons résolu quatre problèmes ouverts depuis 1922 [25], 1950 [34] ou 1975 [12].

Les cas ouverts sont désormais les suivants :

- le décagone ( $n = 10$ ) pour les problèmes de petits polygones de surface maximale, équilatéraux ou non,
- le polygone de 16 sommets ( $n = 2^4$ ) pour les problèmes de petits polygones de périmètre maximum, équilatéraux ou non.

En tant qu'octogonistes, nous désirons conclure cet article en proposant deux problèmes toujours ouverts sur les petits octogones :

1. Quel est le petit octogone de largeur maximale et de diamètre unité ?
2. Quel est le petit octogone équilatéral et de largeur maximale de diamètre unité ?

Le premier problème a été étudié de manière analytique dans un article de Bezdek et Fodor [9]. La largeur d'un polygone est la hauteur minimale interne au polygone ; c'est-à-dire la distance minimale entre deux droites parallèles telles que le polygone soit entre ces deux droites. C'est donc un problème de type max min max de toutes les hauteurs possibles.

Une fois encore, si  $n$  est impair, les petits polygones réguliers sont les solutions optimales de ces deux nouveaux problèmes sur les largeurs. Si  $n$  est pair et n'est pas une puissance de 2, les solutions sont construites à partir des polygones de Reuleaux -ces solutions sont les mêmes que pour les problèmes sur les périmètres-, voir la Figure 3. Les difficultés surviennent à nouveau lorsque  $n$  est une puissance de 2. Pour  $n = 4$ , le quadrilatère présenté en Figure 2 est bien la solution à ce problème avec une largeur de  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  contre  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  dans le cas du carré, qui lui est la solution optimale pour les petits quadrilatères équilatéraux [9]. Ainsi, les deux cas ouverts pour ces problèmes sur les largeurs concernent encore des petits octogones.

Nous conjecturons que la solution optimale du premier problème ouvert (sans la contrainte d'équilatéralité) est celle représentée en Figure 16.

Cette solution est basée sur la configuration 29 comme pour le problème du périmètre mais les solutions sont sensiblement distinctes : 0.9776 contre 0.9764. Elle a été obtenue en 2003 par un algorithme assez standard de séparation et évaluation par intervalles utilisant des techniques de propagation de contraintes

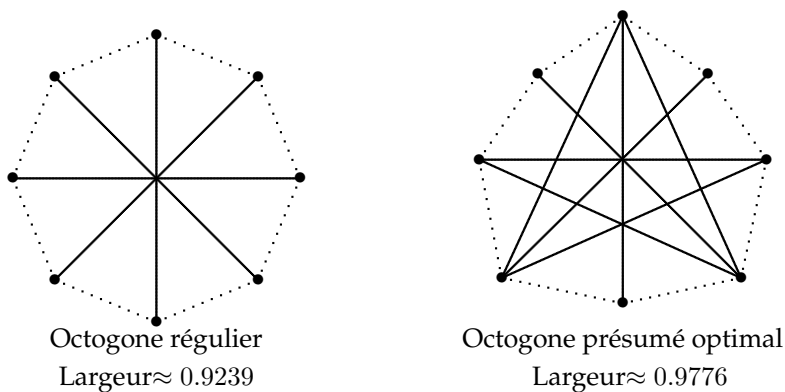


FIG. 16 – Petit octogone présumé être de largeur maximum

et une évaluation des bornes avec l'extension naturelle et aussi Taylor centré au premier ordre, [24]. Une solution analytique, en supposant un axe de symétrie, a été obtenue en 2004, en utilisant MAPLE™.

La solution numérique est donnée par les angles du pentagone interne à la structure : l'angle du sommet en haut de la figure est 0.85806 les deux suivants sont 0.42403 et les deux derniers en bas de la figure sont 0.72210 et 0.72336. La valeur optimale de la solution est donnée exclusivement par les deux angles à 0.42403, ce qui semble vouloir dire que l'on n'a pas forcément un axe de symétrie pour ce problème et qu'une infinité de solutions peuvent y répondre... à suivre...

Pour l'instant, nous n'avons pas pu prouver que la solution optimale correspondait forcément à l'une des 31 configurations connexes de diamètres possibles, et donc, nous ne pouvons pas conclure au sujet de la solution présentée à la Figure 16.

Le problème du petit octogone équilatéral de largeur maximale quant à lui, reste entièrement ouvert.

## Références

- [1] G. Alefeld, J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.
- [2] C. Audet, *Optimisation globale structurée : propriétés, équivalences et résolution*, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1997, <http://www.gerad.ca/~charlesa/>.

- 
- [3] C. Audet, P. Hansen, B. Jaumard, G. Savard, *A branch and cut algorithm for nonconvex quadratically constrained quadratic programming*, Mathematical Programming, Vol. 87, No. 1, Series A, pp. 131–152, 2000.
  - [4] C. Audet, P. Hansen, F. Messine, *The small octagon with longest perimeter*, les Cahiers du GERAD, G-2005-49, 2005, [www.gerad.ca](http://www.gerad.ca).
  - [5] C. Audet, P. Hansen, F. Messine, *Ranking Small Regular Polygons by Area and by Perimeter*, Les Cahiers du GERAD G2005-92, 2005, [www.gerad.ca](http://www.gerad.ca).
  - [6] C. Audet, P. Hansen, F. Messine, S. Perron, *The minimum diameter octagon with unit-length sides : Vincze’s wife’s octagon is suboptimal*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 108, pp. 63–75, 2004.
  - [7] C. Audet, P. Hansen, F. Messine, and J. Xiong, *The largest small octagon*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 98, No. 1, pp. 46–59, 2002.
  - [8] H. Bieri, *Ungelöste Probleme : Zweiter Nachtrag zu Nr. 12*, Elemente der Mathematik, Vol. 16, pp. 105–106, 1961.
  - [9] A. Bezdek and F. Fodor, *On convex polygons of maximal width*, Archiv der Mathematik, Vol. 74, No. 1, pp. 75–80, 2000.
  - [10] B. Datta, *A discrete isoperimetric problem*, Geometriae Dedicata, Vol. 64, pp. 55–68, 1997.
  - [11] P. Erdős, *On sets of distances on  $n$  points*, American Mathematical Monthly, Vol. 53, pp. 248–250, 1946.
  - [12] R. L. Graham, *The largest small hexagon*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 18, pp. 165–170, 1975.
  - [13] <http://mathworld.wolfram.com/GrahamsBiggestLittleHexagon.html>.
  - [14] J.L. Lagouanelle, F. Messine, *Algorithme d’encadrement de l’optimum global d’une fonction différentiable*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Numerical Analysis, T. 326, Série I, pp. 629–632, 1998.
  - [15] D. G. Larman, N. K. Tamvakis, *The decomposition of the  $n$ -sphere and the boundaries of plane convex domains*, in Convexity and graph theory (Jerusalem, 1981), volume 87 of North-Holland Math. Stud., pp. 209–214. North-Holland, Amsterdam, 1984.
  - [16] H. Lenz, *Ungelöste Probleme Nr. 12*, Elemente der Mathematik, pp. 86, 1956.
  - [17] F. Messine, *Méthodes d’optimisation globale basées sur l’analyse d’intervalles pour la résolution de problèmes avec contraintes*, Thèse de doctorat, INPT-ENSEEIH, Toulouse, 1997, [www.enseeiht.fr/~messine](http://www.enseeiht.fr/~messine).
  - [18] F. Messine *Deterministic Global Optimization using Interval Constraint Propagation Techniques*, RAIRO Operations Research, Vol. 38, No. 4, pp. 277–294, 2004.
  - [19] F. Messine, *A Deterministic Global Optimization Algorithm for Design Problems*, in C. Audet, P. Hansen, G. Savard (editors), *Essays and Surveys in Global Optimization*, Kluwer, pp. 267–294, 2005.
  - [20] F. Messine, J.L. Lagouanelle, *Enclosure Methods for Multivariate Differentiable Functions and Application to Global Optimization*, Journal of Universal Computer Science, Vol. 4, No. 6, Springer-Verlag, pp. 589–603, 1998.

- 
- [21] R.E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [22] M.J. Mossinghoff, *A \$1 problem*, American Mathematical Monthly, (forthcoming).
- [23] M.J. Mossinghoff, *Isodiametric Problems for Polygons*, preprint, 2005.
- [24] H. Ratschek, J. Rokne, *New Computer Methods for Global Optimization*, Ellis Horwood, Chichester, 1988.
- [25] K. Reinhardt, *Extremale polygone gegebenen durchmessers*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein, Vol. 31, pp. 251–270, 1922.
- [26] F. Reuleaux, *The Kinematics of Machinery*, translation of german original, New York : Dover, 1963.
- [27] J.J. Schäffer, *Ungelöste Probleme : Nachtrag zu Nr. 12*, Elemente der Mathematik, Vol. 13, pp. 85–86, 1958.
- [28] H.D. Sherali, W.P. Adams, *A Reformulation-Linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems*, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 1999.
- [29] H.D. Sherali, A. Alameddine, *A new reformulation-linearization technique for bilinear programming problems*, Journal of Global Optimization, Vol. 2, No. 4, pp. 379–410, 1992.
- [30] H.D. Sherali, C.H. Tuncbilek, *A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique*, Journal of Global Optimization, Vol. 2, No. 1, pp. 101–112, 1992.
- [31] <http://www.packomania.com>, updated by Specht.
- [32] P.G. Szabó, M.C. Markót, T. Csendes, *Global Optimization in Geometry - Circle Packing into the Square*, in C. Audet, P. Hansen, G. Savard (editors), *Essays and Surveys in Global Optimization*, Kluwer, pp. 233–266, 2005.
- [33] N.K. Tamvakis, *On the perimeter and the area of the convex polygon of a given diameter*, Bull. Greek Math. Soc., Vol. 28, pp. 115–132, 1987.
- [34] S. Vincze, *On a geometrical extremum problem*, Acta Sci. Math. Szeged, Vol. 12, pp. 136–142, 1950.
- [35] D.R. Woodall *Thrackles and Deadlock*, In *Combinatorial Mathematics and Its Applications* (D. J. A. Welsh, Ed.), Academic Press, New York, 1971.
- [36] B. Yuan, *The Largest Small Hexagon*, mémoire de maîtrise, supervisé par Yang Yue, Department of Mathematics, National University of Singapore, 2004.